Extraction et Exploitation de l'Information en Environnements Incertains

Définitions et gestion du conflit pour la combinaison et décision dans la théorie des fonctions de croyance

Arnaud MARTIN

ENSIETA / E3I2 EA3876

Brest, France

Plan

1. Théorie des fonctions de croyance

2. Conflit : Modélisation et décision

3. La gestion du conflit lors de la combinaison

La théorie des fonctions de croyance

- **Espace de discernement :** $\Theta=\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}$ où θ_i est une classe

- L'expert peut s'exprimer sur $2^\Theta=\{\emptyset, \{\theta_1\}, \{\theta_2\}, \ldots, \{\theta_n\}, \{\theta_1, \theta_2\}, \ldots, \Theta\}$, Θ représente l'ignorance et $\emptyset$ l'ouverture au monde hors Θ

- Extension de la DSmT : l'expert peut s'exprimer sur D^Θ : ensemble fermé par les opérateurs d'union et d'intersection (pas complémentaire)

- Les experts s'expriment à partir des **fonctions de masse** définies sur 2^Θ à valeurs dans [0,1] pour une source S_j :

$$\sum_{A \in 2^\Theta} m_j(A) = 1$$

$m_j(A)$* caractérise un degré de croyance en *A

La théorie des fonctions de croyance

Fonctions de masse : en pratique

- Fonctions à support simple : Toute la masse de la source S_j porte sur un sous-ensemble non vide A de 2^{Θ} et sur l'ensemble de discernement Θ (connaissance incertaine et imprécise)

  $m_j(A)= 1\text{-}w$

  $m_j(\Theta)= w,\ w\in[0,1]$

  $m_j(B)=0$ pour tout $B\neq A,\ B\neq \Theta$

  notée A_j^w

Si w=1, alors $m_j(\Theta)$=1 ceci représente l'ignorance totale

Toute fonction de masse non dogmatique ($m_j(\Theta)$>0) et si les A_j sont distincts admet une décomposition canonique en fonctions à support simple

- Modèle probabiliste d'A. Appriou
- Modèle distance de T. Denœux

Combinaison conjonctive

Smets

- **La combinaison de 2 experts est donnée par :**

$$m_{Conj}(A) = \sum_{B_1 \cap B_2 = A} m_1(B_1) m_2(B_2)$$

- **Exemple**

	$\emptyset$	θ_1	θ_2	θ_3	Θ
m_1	0	0.5	0.1	0	0.4
m_2	0	0.2	0	0.5	0.3
m_{Conj}	0.32	0.33	0.03	0.2	0.12

- **Problème d'interprétation de la masse non nulle sur l'ensemble vide**
  - **en monde ouvert : représente une solution non prévue**
  - **en monde fermé : pas acceptable**

La théorie des fonctions de croyance : la combinaison

Combinaison conjonctive normalisée

Dempster-Shafer

$$m(A) = \frac{\sum_{B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_m = A} \prod_{j=1}^{m} m_j(B_j)}{1-k}$$ **si *A* ≠ Ø**

et *m*(Ø)=0

avec $$k = \sum_{B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_m = \varnothing} \prod_{j=1}^{m} m_j(B_j) < 1$$

k* est appelé une mesure de conflit entre les sources (dépend de la modélisation), ou plutôt *inconsistance de la fusion

***k* : conflit global**

La théorie des fonctions de croyance : la décision

Autres fonctions de croyance :

- **La crédibilité** *bel* regroupe les masses inclues
- **La plausibilité** *pl* regroupe les masses intersectées

Décisions sur θ et pas sur 2^θ

- **Pessimiste :** $\max_{A \in \Theta} bel(A)$
- **Optimiste :** $\max_{A \in \Theta} pl(A)$
- **Compromis :** $\max_{A \in \Theta} betP(A)$

où la probabilité pignisitic (Smets90) est donnée pour $X \in 2^\Theta$, avec $X \neq \emptyset$

$$betP(X) = \sum_{Y \in 2^\Theta, Y \neq \emptyset} \frac{|X \cap Y|}{|Y|} \frac{m(Y)}{1 - m(\emptyset)}.$$

Plan

1. Théorie des fonctions de croyance

2. Conflit : Modélisation et décision
   - Mesures de conflit
   - Conflit et fiabilité
   - Décision sur informations conflictuelles

3. La gestion du conflit lors de la combinaison

Le conflit

Mesures de conflit

Définition

Le conflit entre plusieurs sources peut être défini comme la contradiction entre leur fonction de masse.

Origines du conflit

- **Les sources ne sont pas fiables. L'information est erronée et peut conduire à une ambiguïté**
- **Le cadre de discernement est non exhaustif : Hypothèse d'un monde fermé fausse**
- **Les sources observent des phénomènes différents. Dans ce cas il ne faut pas les combiner**

Non-spécificité, doute et conflit

Mesures de conflit

Klir (1994) : 2 types d'incertitude

- **non-spécificité**
- **doute**

Mesures à partir de mesures entropiques de Shanon définies pour une seule fonction de masse :

$$-\sum_{X\in 2^{\Theta}} m(X)log(m(X))$$

Ce n'est pas du conflit

Conflit global, conflit partiel

Mesures de conflit

Conflit global : $k = m_{Conj}(\varnothing)$

	$\emptyset$	A	B	C	Θ
m_1	0	0.5	0.1	0	0.4
m_2	0	0.2	0	0.5	0.3
m_{Conj}	0.32	0.33	0.03	0.2	0.12

$$m_{Conj}(\emptyset) = \underbrace{m_1(A)m_2(C)}_{\text{Conflit partiel}} + \underbrace{m_1(B)m_2(A)}_{\text{Conflit partiel}} + \underbrace{m_1(B)m_2(C)}_{\text{Conflit partiel}}$$

Conflit partiel dans 2^{Θ} pas nécessairement dans D^{Θ}

Auto-conflit

Mesures de conflit

Les règles conjonctives $\oplus$ ne sont pas idempotentes

	$\emptyset$	A	B	C	$\ominus$
m_1	0	0.7	0.2	0.1	0
m_2	0	0.7	0.2	0.1	0
m_{12} normalisée	0	0.91	0.07	0.02	0
m_{12} non normalisée	0.46	0.49	0.04	0.01	0

Le conflit global de deux sources identiques est non nul !

Auto-conflit d'ordre *n* (Martin et Osswald, 2006) : $a_n(j) = \bigoplus_{k=1}^{n} m_j(\emptyset)$

or

$$a_n(j) \leq a_{n+1}(j)$$

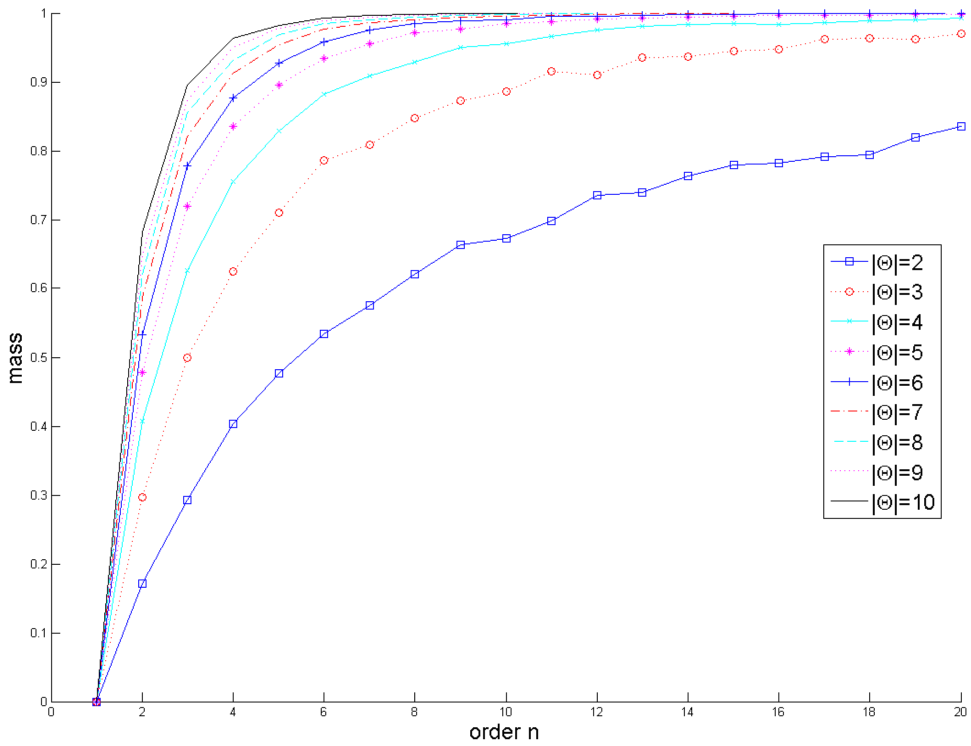
plus le nombre d'experts est important plus le conflit peut être proche de 1

Auto-conflit

Mesures de conflit

***k*, le conflit global, n'est pas une mesure de conflit entre les fonctions de masse**

Il faut relativiser le conflit global par rapport à l'auto-conflit



Moyenne de l'auto-conflit pour des fonctions de masse générée aléatoirement

Mesure de conflit fondée sur une distance

Principe : Le conflit d'un expert s'exprime par rapport aux autres experts s'exprimant sur la même observation

D'où l'utilisation d'une distance

Distance sur les fonctions de masse

$$d(m_1, m_2) = \sqrt{\frac{1}{2}(\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2)^t \underline{\underline{D}}(\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2)},$$

$$D(A, B) = \begin{cases} 1, \text{ if } A = B = \emptyset, \\ \dfrac{|A \cap B|}{|A \cup B|}, \forall A, B \in 2^{\Theta}. \end{cases}$$

Mesure de conflit fondée sur une distance

Mesures de conflit

Martin *et al.* 2008

Conflit entre 2 experts :

$$Conf(1,2) = d(m_1, m_2)$$

Conflit entre un expert *j* et les *M*-1 autres :

$$Conf(j,\mathcal{E}) = \frac{1}{M-1} \sum_{e=1, e\neq j}^{M} Conf(j,e)$$

ou encore : $Conf(j,\mathcal{E}) = d(m_j, m_M)$

où m_M est une fonction de masse issue de la combinaison des *M*-1 autres experts que *j*

Conflit et fiabilité

Martin *et al.* 2008

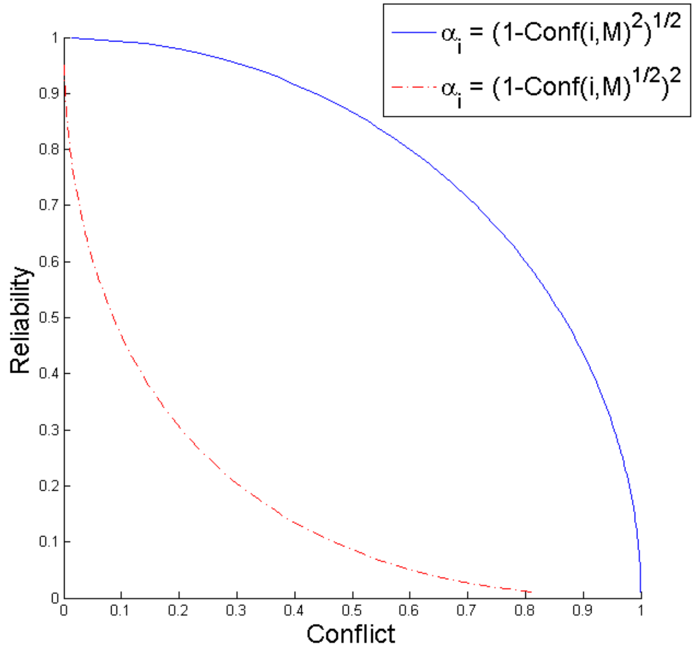
Conflit issu de sources non-fiables : estimation de la fiabilité

Hypothèse : une source est non-fiable si elle est en conflit avec les autres sources

Estimation de la fiabilité : comme une fonction décroissante du conflit

$$\alpha_j = f(Conf(j, \mathcal{E}))$$

$$\alpha_j = \left(1 - Conf(j, \mathcal{E})^{\lambda}\right)^{1/\lambda}$$



Intégration du conflit-fiabilité par affaiblissement

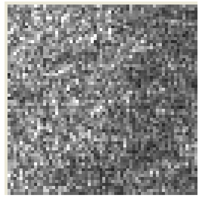
$$\begin{cases} m_i^{\alpha}(X) = \alpha_i m_i(X), \forall X \in 2^{\Theta} \setminus \{\Theta\} \\ m_i^{\alpha}(\Theta) = 1 - \alpha_i(1 - m_i(\Theta)). \end{cases}$$

Décision sur des informations conflictuelles

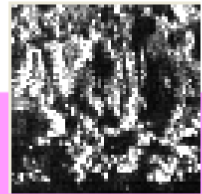
Martin 2008

Motivations

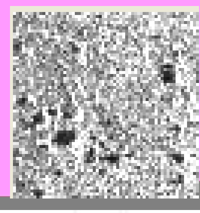
Données GESMA



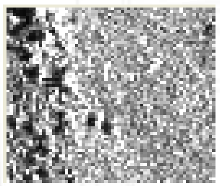
Sable



Roche



Roche OU Sable



Roche ET Sable

Décision sur des informations conflictuelles

Martin 2008

Chercher à décider sur 2^{Θ} nécessite de pondérer les fonctions de décision habituelles f_d (plausibilité, crédibilité, pignistique, …)

Appriou 2005 $A = argmax_{X \in 2^{\Theta}} (m_d(X) f_d(X))$

$$m_d(X) = K_d \lambda_X \left(\frac{1}{|X|^r} \right)$$

Sur D^{Θ}

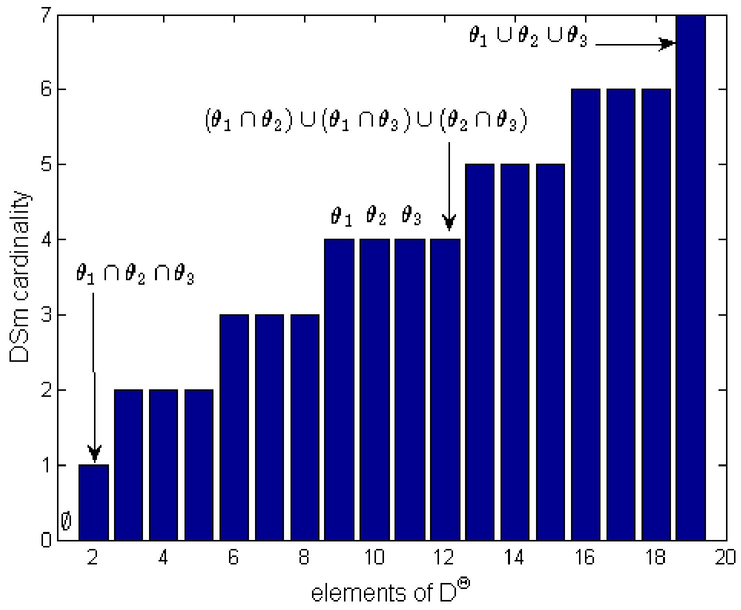
$$A = argmax_{X \in D^{\Theta}} (m_d(X) f_d(X))$$

$$m_d(X) = K_d \lambda_X \left(\frac{1}{\mathcal{C}_{\mathcal{M}}(X)^r} \right)$$

Décider sur un sous-ensemble de D^{Θ}

$$A = argmax_{X \in \mathcal{D}, \mathcal{D} \subset D^{\Theta}} (m_d(X) f_d(X))$$

tel que la spécificité



Plan

1. Théorie des fonctions de croyance

2. Conflit : Modélisation et décision

3. La gestion du conflit lors de la combinaison

Exemple de Zadeh

Conflit global

	$\emptyset$	A	B	C	Θ
m_1	0	0.9	0	0.1	0
m_2	0	0	0.9	0.1	0
m_{12} normalisée	0	0	0	1	0
m_{12} non normalisée	0.99	0	0	0.01	0

Toute la masse est sur *C* seul élément où les 2 sources sont d'accord

Problèmes :

- **Conjonctive normalisée :** La normalisation masque le conflit
  Intéressant si monde fermé sans conflit
- **Conjonctive non-normalisée :** interprétation de *k* et de $\emptyset$

Supprimer le conflit global

Disjonctive

$$\forall X \in 2^{\Theta}$$

$$m_{\text{Dis}}(X) = \sum_{A \cup B = X} m_1(A) m_2(B).$$

- **Élargit les éléments focaux donc perte de spécificité : En pratique très problématique**

- **Intéressant si on ne sait pas modéliser les fiabilités des sources, leurs ambiguïtés et imprécisions**

Supprimer l'idempotence et donc l'auto-conflit

Moyenne des fonctions de masse (ex Murphy 2000)

$$m_{Mean}(X) = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} m_j(X).$$

Denœux (2006) : La règle conjonctive prudente sur les fonctions à support simple A^{w1} et A^{w2} est donnée par $A^{\min(w1,w2)}$

et se généralise sur les fonctions de masse non-dogmatiques

Remarque : absence d'élément neutre

intéressante si peu de conflit

Hypothèse du monde fermé : fausse

Smets

TBF (*Transferable Belief Functions*) en monde ouvert

$\emptyset$	A	B	C	$\ominus$

$$m(A) = \sum_{B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_m = A \neq \emptyset} \prod_{j=1}^{m} m_j(B_j)$$

$$m(\emptyset) = \sum_{B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_m = \emptyset} \prod_{j=1}^{m} m_j(B_j)$$

***k* est affecté à l'ensemble vide**

Décision pignistique : Retour en monde fermé par normalisation du conflit

Hypothèse du monde fermé : fausse

hedging

La technique du *hedging* consiste à ajouter un élément inconnu *e* au cadre de discernement pour rester en monde fermé

***i.e.* que l'on suppose que le conflit vient du manque d'exhaustivité**

$\emptyset$	A	B	C	e	$\ominus$

$$m(A \cup e) = \sum_{B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_m = A \neq \emptyset} \prod_{j=1}^{m} m_j(B_j)$$

$$m(e) = \sum_{B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_m = \emptyset} \prod_{j=1}^{m} m_j(B_j)$$

Répartir le conflit

Conflit

Le conflit global : *k*

Yager 1987, Inagaki 1991, Lefèvre 2002, Florea 2006

Le conflit partiel

Dubois et Prade 1988, Smarandache et Dezert 2005,

Martin et Osswald 2006 et 2007

Conflit global est issu de l'ignorance

Yager 1987

Yager propose un modèle en monde fermé où la mesure de conflit est affectée au cadre de discernement total θ

$\emptyset$	A	B	C	Θ

$$m(A)=\sum_{B_1\cap B_2\cap\ldots\cap B_m=A\neq\varnothing}\prod_{j=1}^{m}m_j(B_j)$$

Calcul de *m*(*Θ*) :

$$m(\Theta)=1-\sum_{A\subseteq D}\sum_{B_1\cap B_2\cap\ldots\cap B_m=A\neq\varnothing}\prod_{j=1}^{m}m_j(B_j)$$

puis la modifie

$$m(\Theta)=m(\Theta)+\sum_{B_1\cap B_2\cap\ldots\cap B_m=\varnothing}\prod_{j=1}^{m}m_j(B_j)$$

Répartition du conflit global de manière générale

Inagaki 1991, Lefèvre 2002

Une fois le conflit calculé $m_{\text{conj}}(\emptyset)$ il est réparti selon une fonction de poids

$$\forall X \in 2^{\Theta} \qquad m_c(X) = m_{\text{conj}}(X) + w(X)m_{\text{conj}}(\emptyset)$$

$$\sum_{X \in 2^{\Theta}} w(X) = 1$$

$\emptyset$	A	B	$A \cup B$	C	$A \cup C$	$B \cup C$	Θ

Répartition du conflit global de manière générale : règle mixte

Florea 2006

On pose $k = m_{\text{conj}}(\emptyset)$

$$\forall X \in 2^{\Theta} \qquad m_{\text{Flo}}(X) = \beta_1(k) m_{\text{Dis}}(X) + \beta_2(k) m_{\text{Conj}}(X)$$

Les poids peuvent être choisi de façon a avoir une symétrie pour *k*=1/2

$$\beta_1(k) = \frac{k}{1 - k + k^2},$$
$$\beta_2(k) = 1 - \beta_1(k) = 1 - \frac{k}{1 - k + k^2}.$$

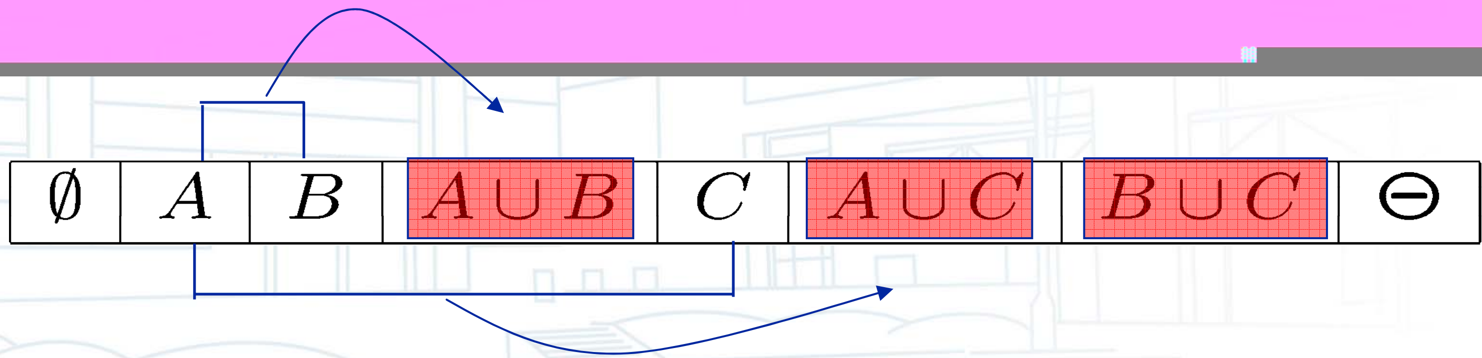
Conflit partiel sur ignorance partielle

Dubois et Prade 1988

Compromis des approches conjonctives et disjonctives

$$
\begin{aligned}
m_{\mathrm{DP}}(X) \;=\; & \sum_{A\cap B=X} m_1(A)m_2(B) \\
& + \sum_{\substack{A\cup B=X \\ A\cap B=\emptyset}} m_1(A)m_2(B).
\end{aligned}
$$

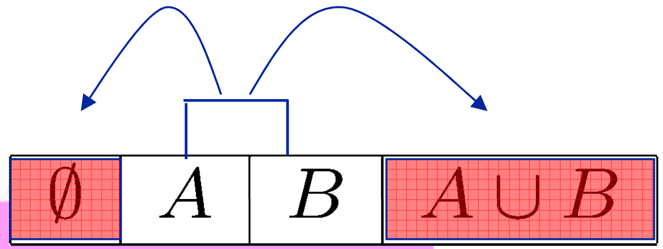
Répartition fine du conflit



Répartition du conflit partiel de manière générale : règle mixte

Martin et Osswald 2007

Extension de la règle de Florea et/ou Dubois et Prade à partir de poids sur le conflit partiel



$$
\begin{aligned}
m_{\mathrm{Mix}}(X) &= \sum_{A \cup B = X} \delta_1 m_1(A) m_2(B) \\
&+ \sum_{A \cap B = X} \delta_2 m_1(A) m_2(B)
\end{aligned}
$$

On retrouve la règle de Dubois et Prade avec

$$\delta_1(A,B) = 1 - \delta_2(A,B) = \mathbb{1}_{A \cap B = \emptyset}$$

Prise en compte de la spécificité des réponses et conflit partiel

$$\delta_1(A,B) = 1 - \frac{|A \cap B|}{\min(|A|,|B|)}$$

Conflit partiel réparti proportionnellement

Smarandache et Dezert 2005

PCR5 : Redistribution du conflit partiel proportionnellement sur les *singletons* qui l'engendrent

on ajoute à la combinaison conjonctive :

$m_1^2(A)m_2(B)/(m_1(A)+m_2(B))$ à $m(A)$ et

$m_1(A)m_2^2(B)/(m_1(A)+m_2(B))$ à $m(B)$

	$\emptyset$	A	B	Θ
m_1	0	0.6	0	0.4
m_2	0	0.3	0.2	0.5
m_c	0.12	0.6	0.08	0.2
m_{PCR5}	0	0.69	0.11	0.2

$$m_{\mathrm{PCR5}}(X) = m_{\mathrm{conj}}(X) + \sum_{i=1}^{M} m_i(X) \sum_{\substack{(Y_{\sigma_i(1)},\ldots,Y_{\sigma_i(M-1)})\in(D^\Theta)^{M-1} \\ \bigcap_{k=1}^{M-1} Y_{\sigma_i(k)}\cap X\equiv\emptyset}} \frac{\left(\prod_{j=1}^{M-1} m_{\sigma_i(j)}(Y_{\sigma_i(j)})\mathbb{1}_{j>i}\right)\prod_{Y_{\sigma_i(j)}=X} m_{\sigma_i(j)}(Y_{\sigma_i(j)})}{\sum_{Z\in\{X,Y_{\sigma_i(1)},\ldots,Y_{\sigma_i(M-1)}\}} \prod_{Y_{\sigma_i(j)}=Z} \left(m_{\sigma_i(j)}(Y_{\sigma_i(j)}).T(X{=}Z,m_i(X))\right)}$$

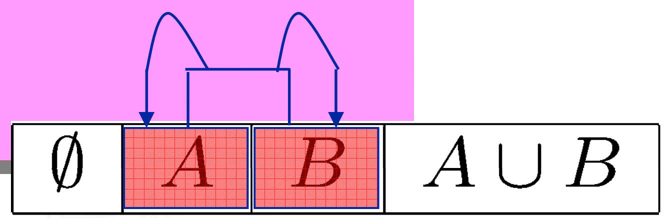
Conflit partiel réparti proportionnellement

Martin et Osswald 2006

PCR6 : Redistribution du conflit partiel proportionnellement sur les *éléments* qui l'engendrent

	$A \cup B$	$B \cup C$	$A \cup C$	Θ
Expert 1	0.7	0	0	0.3
Expert 2	0	0	0.6	0.4
Expert 3	0	0.5	0	0.5

$$m_{PRC6}(X) = m_{conj}(X) + \sum_{i=1}^{M} m_i(X)^2 \sum_{\substack{\bigcap_{k=1}^{M-1} Y_{\sigma_i(k)} \cap X \equiv \emptyset \\ (Y_{\sigma_i(1)},\ldots,Y_{\sigma_i(M-1)}) \in (D^{\Theta})^{M-1}}} \left(\frac{\prod_{j=1}^{M-1} m_{\sigma_i(j)}(Y_{\sigma_i(j)})}{m_i(X) + \sum_{j=1}^{M-1} m_{\sigma_i(j)}(Y_{\sigma_i(j)})} \right)$$



$$\begin{cases} \sigma_i(j) = j & \text{if } j < i, \\ \sigma_i(j) = j + 1 & \text{if } j \geq i, \end{cases}$$

Intérêt de la PCR6 face à la PCR5

Martin et Osswald 2006

Si on a $m_1(A)m_3(B)m_2(A \cup B)$

PCR5 : redistribution sur *A* et *B* proportionnellement à $m_1(A)$ et $m_3(B)$

PCR6 : redistribution sur *A*, *B* et $A \cup B$ proportionnellement à $m_1(A)$, $m_3(B)$, et $m_2(A \cup B)$

Exemple surprenant où le conflit est total :

	A	B	C	D	E	F	G
Expert 1	0.0	0.57	0.43	0.0	0.0	0.0	0.0
Expert 2	0.58	0.0	0.0	0.42	0.0	0.0	0.0
Expert 3	0.58	0.0	0.0	0.0	0.42	0.0	0.0
Expert 4	0.58	0.0	0.0	0.0	0.0	0.42	0.0
Expert 5	0.58	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.42

Résultat de la fusion est une probabilité

	A	B	C	D	E	F	G
PCR5	0.1915	0.2376	0.1542	0.1042	0.1042	0.1042	0.1042
PCR6	0.5138	0.1244	0.0748	0.0718	0.0718	0.0718	0.0718

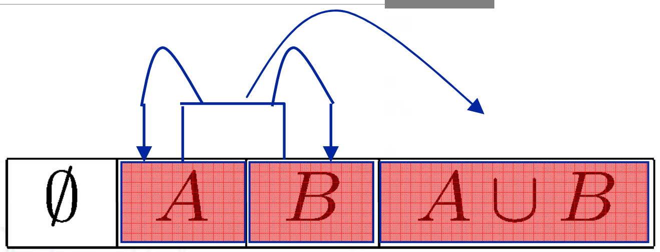
Pour chaque sous ensemble de 2, 3 ou 4 experts : décision PCR5 et 6 : *A*

PCR affaiblie : DPCR

Martin et Osswald 2007

Les conflits partiels sont répartis sur les éléments qui les engendrent proportionnellement et sur les ignorances partielles selon un facteur d'affaiblissement $\alpha \in [0,1]$

$$
\begin{aligned}
m_{\mathrm{DPCR}}(X) &= m_{\mathrm{Conj}}(X) \\
&+ \sum_{\substack{Y \in 2^{\Theta}, \\ X \cap Y = \emptyset}} \alpha \left(\frac{m_1(X)^2 m_2(Y)}{m_1(X)+m_2(Y)} + \frac{m_2(X)^2 m_1(Y)}{m_2(X)+m_1(Y)} \right) \\
&+ \sum_{\substack{Y_1 \cup Y_2 = X \\ Y_1 \cap Y_2 = \emptyset}} (1-\alpha) m_1(Y_1) m_2(Y_2),
\end{aligned}
$$



PCR affaiblie : choix du facteur

Martin et Osswald 2007

- **À partir d'une mesure de conflit partiel**

$$f_i(Y_1, ..., Y_M) = \frac{\sum_{j=1}^{M} \mathbb{1}_{\{Y_j \cap Y_i = \emptyset\}}}{M(M-1)}$$

$$\alpha(Y_1, ..., Y_M) = 1 - \sum_{i=1}^{M} f_i(Y_1, ..., Y_M)$$

Exemple

	A	B	$A \cup C$	Θ
Expert 1	0.7	0	0	0.3
Expert 2	0	0.5	0	0.5
Expert 3	0	0	0.6	0.4

il n'y a pas de conflit entre

A **et** $A \cup C$

mais le facteur est identique

PCR affaiblie : choix du facteur

Martin et Osswald 2007

- **À partir d'une mesure de non conflit partiel à valeur dans** $\left[0, \frac{1}{M}\right]$

$$\alpha_i(Y_1, \ldots, Y_M) = \frac{1}{M} - f_i(Y_1, \ldots, Y_M)$$

$$= \frac{\sum_{j=1, j\neq i}^{M} \mathbb{1}_{\{Y_j \cap Y_i \neq \emptyset\}}}{M(M-1)}.$$

PCR affaiblie : choix du facteur

Martin et Osswald 2007

- **À partir d'une fonction de non conflit** $\alpha_i(X, Y_{\sigma_i(1)}, \ldots, Y_{\sigma_i(M-1)})$

$$m_{\mathrm{DPCR}}(X) = m_{\mathrm{Conj}}(X) + \sum_{i=1}^{M} m_i(X)^2 \sum_{\substack{\overset{M-1}{\underset{k=1}{\cap}} Y_{\sigma_i(k)} \cap X = \emptyset \\ (Y_{\sigma_i(1)},\ldots,Y_{\sigma_i(M-1)}) \in (2^{\Theta})^{M-1}}} \alpha_i \boxed{\lambda} \left(\frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{M-1} m_{\sigma_i(j)}(Y_{\sigma_i(j)})}{m_i(X) + \displaystyle\sum_{j=1}^{M-1} m_{\sigma_i(j)}(Y_{\sigma_i(j)})} \right)$$

$$+ \sum_{\substack{Y_1 \cup \ldots \cup Y_M = X \\ Y_1 \cap \ldots \cap Y_M = \emptyset}} (1 - \sum_{i=1}^{M} \alpha_i) \prod_{j=1}^{M} m_j(Y_j),$$

PCR affaiblie : choix du facteur

Martin et Osswald 2007

Avec λ donné pour $\alpha_i \neq 0$

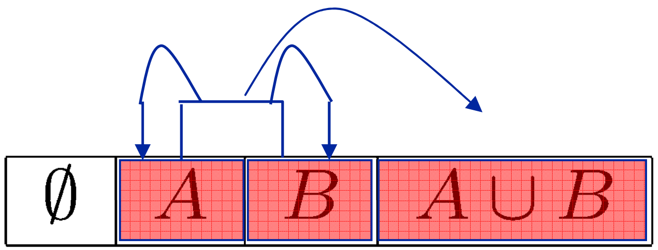
$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{M} \alpha_i}{< \alpha, \gamma >}$$

$$\gamma_i = \frac{m_i(X)}{m_i(X) + \sum_{j=1}^{M-1} m_{\sigma_i(j)}(Y_{\sigma_i(j)})}$$

PCR mixte et affaiblie : MDPCR

Martin et Osswald 2007

$$
\begin{aligned}
m_{\mathrm{MDPCR}}(X) = & \sum_{\substack{Y_1 \cup Y_2 = X,\\ Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset}} \delta m_1(Y_1) m_2(Y_2) \\
+ & \sum_{\substack{Y_1 \cap Y_2 = X,\\ Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset}} (1-\delta) m_1(Y_1) m_2(Y_2) \\
+ & \sum_{\substack{Y \in 2^{\Theta},\\ X \cap Y = \emptyset}} \alpha \left(\frac{m_1(X)^2 m_2(Y)}{m_1(X)+m_2(Y)} + \frac{m_2(X)^2 m_1(Y)}{m_2(X)+m_1(Y)} \right), \\
+ & \sum_{\substack{Y_1 \cup Y_2 = X\\ Y_1 \cap Y_2 = \emptyset}} (1-\alpha) m_1(Y_1) m_2(Y_2).
\end{aligned}
$$



Comparaison de règles

1. **Étude des propriétés**
2. **Sur des fonctions de masse générées aléatoirement**
3. **Sur des données et applications réelles**

Comparaison de règles

Martin et Osswald 2006

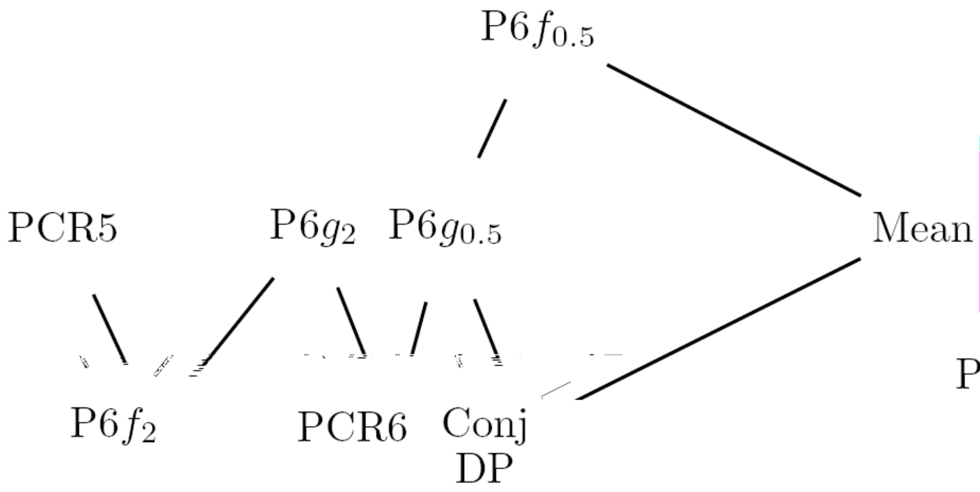
Fonctions de masse aléatoire : étude des différences en termes de décisions

nombre de classes	2	3	4	5	6	7
changement de décision : cas 3 experts						
PCR/Conj	0.61%	5.51%	9.13%	12.11%	14.55%	16.7%
PCR/DP	0.61%	2.25%	3.42%	4.35%	5.05%	5.7%
DP/Conj	0.00%	3.56%	6.19%	8.39%	10.26%	11.9%
changement de décision : cas 3 experts						
PCR6/Conj	1.04%	8.34%	13.90%	18.38%	21.98%	25.1%
PCR6/DP	1.04%	5.11%	7.54%	9.23%	10.42%	11.3%
DP/Conj	0.00%	4.48%	8.88%	12.88%	16.18%	19.0%

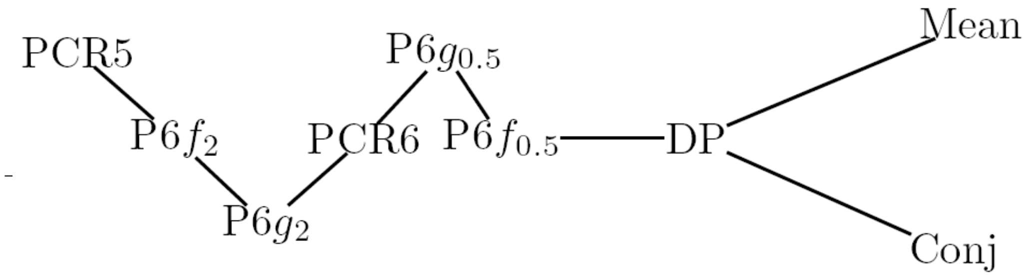
Comparaison de règles

Osswald et Martin 2006

Fonctions de masse aléatoire : étude en termes de proximité



2 classes, 3 experts



3 classes, 4 experts

Conclusion

- **Le conflit dans la théorie des fonctions de croyance est plus complexe que la mesure *k***

- **Affaiblissement important, possible de différentes façons (sur les masses et dans la combinaison), mais ne suffit pas toujours**

- **Mesure et gestion fine du conflit semble essentielle :**
  - **Auto-conflit**
  - **Conflit partiel**

- **Règles de combinaison abondantes : no free lunch theorem**
- **Relation modélisation-combinaison-décision**

Vers une règle encore plus générale …

Martin et Osswald 2007

- **Conflit partiel considéré seulement quand au moins 2 experts sont en conflit**
- **Imprécision des réponses prise en compte seulement quand il n'y a pas de conflit**

M **experts non en conflit**

$$\varepsilon_k(Y_1, ..., Y_M) = \{\{Y_{i_1}, ..., Y_{i_k}\}, i_j \in I : \\ I \subset \{1, ..., M\}, |I| = k, \cap_{j=1}^{k} Y_{i_j} \neq \emptyset\},$$

$$\overline{k} = argmax_k\{\varepsilon_k \neq \emptyset\} \quad \forall Z = \{Y_{i_1}, ..., Y_{i_k}\} \in \varepsilon_{\overline{k}}$$

$$\delta(Z) = 1 - \frac{|\cap_{j=1}^{\overline{k}} Y_{i_j}|}{\min\limits_{j \in \{1,...,\overline{k}\}} |Y_{i_j}|}$$

Vers une règle encore plus générale …

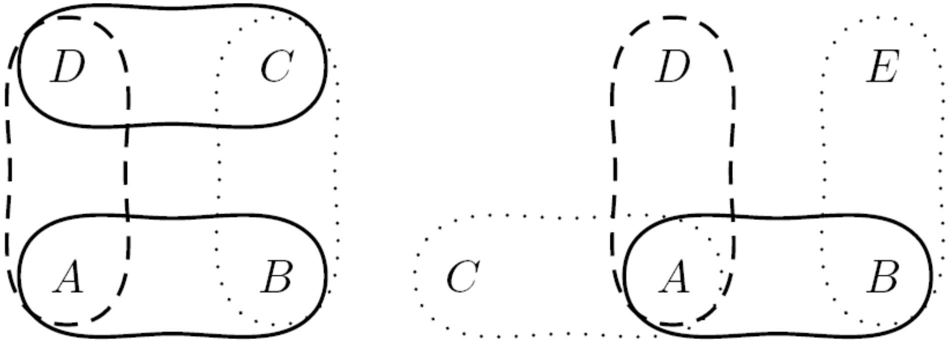
Martin et Osswald 2007

- **Règle mixte étendue**

$$m_{\text{EMix}}(X) = \sum_{Y_1\cup\ldots\cup Y_M=X} \; \sum_{Z\in\varepsilon_{\overline{k}}(Y_1,\ldots,Y_M)} \delta(Z)\prod_{j=1}^{M} m_j(Y_j)$$

$$+ \sum_{\substack{\{Y_{i_1},\ldots,Y_{i_k}\}=Z\in\epsilon_{\overline{k}}(Y_1,\ldots,Y_M)\\ Y_{i_1}\cap\ldots\cap Y_{i_{\overline{k}}}=X,}} \frac{(1-\delta(Z))}{|\varepsilon_{\overline{k}}(Y_1,\ldots,Y_M)|}\prod_{j=1}^{M} m_j(Y_j).$$

$\overline{k} = 2$



$\overline{k} = 3$

$\varepsilon_2 = \{\{A\cup B, B\cup C\}, \{B\cup C, C\cup D\}, \{C\cup D, A\cup D\},$ $\{A\cup B, A\cup D\}\}$

$\varepsilon_3 = \{\{A\cup B, A\cup C\ A\cup D\}\}$

Extension de la PCR6 : PCR6f

Martin et Osswald 2006

$$m_{\mathrm{PCR6f}}(X) = m_{\mathrm{conj}}(X) + \sum_{i=1}^{M} m_i(X) f(m_i(X)) \sum_{\substack{\bigcap_{k=1}^{M-1} Y_{\sigma_i(k)} \cap X \equiv \emptyset \\ (Y_{\sigma_i(1)},\ldots,Y_{\sigma_i(M-1)}) \in (D^{\Theta})^{M-1}}} \left(\frac{\prod_{j=1}^{M-1} m_{\sigma_i(j)}(Y_{\sigma_i(j)})}{f(m_i(X)) + \sum_{j=1}^{M-1} f(m_{\sigma_i(j)}(Y_{\sigma_i(j)}))} \right)$$

f **est une fonction croissante de [0,1] dans** $\mathbb{R}^+$

Extension de la PCR6 : PCR6g

Martin et Osswald 2006

$$m_{\mathrm{PCR6g}}(X) = m_{\mathrm{conj}}(X) + \sum_{i=1}^{M} \sum_{\substack{\bigcap_{k=1}^{M-1} Y_{\sigma_i(k)} \cap X \equiv \emptyset \\ (Y_{\sigma_i(1)},\ldots,Y_{\sigma_i(M-1)}) \in (D^{\Theta})^{M-1}}}$$

$$m_i(X) \frac{\left(\prod_{j=1}^{M-1} m_{\sigma_i(j)}(Y_{\sigma_i(j)})\right)\left(\prod_{Y_{\sigma_i(j)}=X} \mathbb{1}_{j>i}\right) g\left(m_i(X) + \sum_{Y_{\sigma_i(j)}=X} m_{\sigma_i(j)}(Y_{\sigma_i(j)})\right)}{\sum_{Z\in\{X,Y_{\sigma_i(1)},\ldots,Y_{\sigma_i(M-1)}\}} g\left(\sum_{Y_{\sigma_i(j)}=Z} m_{\sigma_i(j)}(Y_{\sigma_i(j)}) + m_i(X)\mathbb{1}_{X=Z}\right)},$$

g **est une fonction croissante de [0,1] dans** $\mathbb{R}^+$