

Estimation d'un mélange de distributions α -stables à partir de l'algorithme EM

Estimation of mixture of α -stable distributions with EM algorithm

Anthony Fiche Arnaud Martin Jean-Christophe Cexus Ali Khenchaf
ENSIETA, E³I² EA3876

2 rue François Verny 29806 Brest Cedex 9

Anthony.Fiche@ensieta.fr, Arnaud.Martin@ensieta.fr, Jean-Christophe.Cexus@ensieta.fr, Ali.Khenchaf@ensieta.fr

Résumé :

Le modèle Gaussien est souvent utilisé dans de nombreuses applications. Cependant, cette hypothèse est réductrice. Par exemple, il est possible que les données fournies par des capteurs ne soient pas symétriques et/ou présentent une décroissance rapide au niveau de la queue de la distribution. De plus, il est rare que la densité de probabilité représentant les données soit unimodale. Il existe des algorithmes permettant l'estimation d'un mélange de distributions. L'algorithme Espérance-Maximisation (EM) permet entre autre d'estimer un mélange de distributions Gaussiennes.

Nous proposons dans ce papier d'étendre l'algorithme EM pour estimer un mélange de distributions α -stables. Un des objectifs futurs de ce papier est d'appliquer la notion de fonctions de croyance continues sachant que les informations fournies par les sources peuvent être modélisées par un mélange de densité de probabilité α -stables.

Mots-clés :

Mélange de distributions, Algorithme EM, distributions α -stables, Fonctions de croyance continues.

Abstract:

Some applications use assumption of Gaussian models. However, this assumption is reductive. For example, it is possible that data from sensors are not symmetric and/or tails decays rapidly. Moreover, probability density function is often multimodal. There are some algorithms which can estimate parameters of distributions. Expectation-Maximization (EM) algorithm can estimate a mixture of Gaussian distributions.

We propose in this paper to extend EM algorithm to estimate a mixture of α -stable distributions. One of future objectives is to use continuous belief functions given that informations from sensors can be modeled with a mixture of α -stable probability density.

Keywords:

Mixture of distributions, EM algorithm, distributions α -stable, Continuous belief functions.

1 Introduction

Les distributions stables ont été introduites par Paul Lévy dans [12]. La notion de sta-

bilité traduit le fait que la somme de 2 variables indépendantes, suivant chacune une loi de paramètre α , suit également une loi de paramètre α . Il est possible de représenter à partir de leurs définitions des distributions plus classiques, comme les distributions Gaussiennes ou de Cauchy. De nombreuses applications utilisent cette notion comme en radar [1], ingénierie [17], finance [15] ...

En général, on utilise le modèle Gaussien car il permet de simplifier les problèmes. Cependant, les signaux sont rarement Gaussiens et sont souvent complexes. Par exemple, les données peuvent présenter des propriétés d'asymétrie et/ou de queues lourdes. Une distribution est dite à queues lourdes si la queue de la distribution considérée décroît plus lentement que la queue d'une distribution Gaussienne. La propriété d'asymétrie signifie qu'il n'existe pas de mode tel que la densité de probabilité soit symétrique. L'avantage des distributions α -stables par rapport au cas Gaussien est qu'elles permettent de prendre en compte ces caractéristiques.

Il existe plusieurs moyens d'estimer les distributions stables comme la méthode des quantiles proposée par McCulloch [14] ou la méthode par régression linéaire de Koutrouvelis [11]. Dans le cas unimodal, il est possible d'effectuer une estimation par maximum de vraisemblance [19]. Mais en général, la densité de probabilité représentant les données des capteurs est multimodale [8]. Il est alors impossible de la représenter par une seule densité de proba-

bilité mais par un mélange de densités de probabilité. Le cas d'un mélange de Gaussiennes a déjà été traité et conduit à un algorithme appelé Expectation-Maximization (EM) développé par Dempster [5]. L'estimation d'un mélange d' α -stables a été présenté avec une méthode type Bayésienne [20]. Nous proposons ici d'étendre l'algorithme EM dans le cas d'un mélange de densités de probabilité α -stable.

La perspective de ce papier est de pouvoir appliquer la théorie des fonctions de croyance continues [21] aux distributions α -stables dans des travaux futurs. Par exemple, les données fournies par les capteurs peuvent être imprécises et incertaines. L'avantage de la théorie des fonctions de croyance par rapport à une approche probabiliste est de prendre en considération ces notions. Le cas mélange de Gaussiennes, qui est un cas particulier des lois stables, a déjà été présenté dans [3]. La notion de fonctions croyance continues a été appliquée dans [9] en considérant une distribution α -stable symétrique.

La structure de notre papier est la suivante : dans la section 2, nous définissons la notion de distributions α -stables. Ensuite, nous développons l'algorithme EM ainsi que son utilisation dans le cas d'un mélange de Gaussiennes dans la section 3. La section 4 présente l'extension de l'algorithme EM dans le cas d'un mélange de distributions α -stables. Enfin, nous exposons nos résultats dans la partie 5.

2 Les distributions α -stables

Les distributions α -stables sont une classe de distributions permettant de modéliser les phénomènes d'asymétrie mais aussi de queues lourdes. Dans cette partie, nous présentons la notion de variable aléatoire stable ainsi que la représentation de la densité de probabilité.

2.1 Stabilité

La notion de stabilité a été introduite par P. Lévy dans [12]. Une variable aléatoire X est dite stable si $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2$, il existe $c \in \mathbb{R}^+$

et $d \in \mathbb{R}$ tel que :

$$aX_1 + bX_2 = cX + d \quad (1)$$

avec X_1 et X_2 2 variables aléatoires stables indépendantes.

L'équation (1) définit la notion de stabilité mais ne donne en aucun cas la manière de paramétrer les distributions α -stable. En général, elles sont définies à partir de leurs fonctions caractéristiques.

2.2 Fonction caractéristique d'une α -stable

Il existe dans la littérature plusieurs paramétrisations des distributions α -stables, notées $S_\alpha(\beta, \gamma, \delta)$. La plus connue est celle introduite par Samorodnitsky et Taquq [22]. Cependant, ce n'est pas la plus employée. On utilise généralement la définition donnée par Zolotarev [23]. Une variable aléatoire est dite stable si sa fonction caractéristique $\phi(t)$ vérifie :

$$\begin{aligned} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ & \phi(t) = \exp(it\delta - |\gamma t|^\alpha) \\ & \quad \times \exp(-i|\gamma t|^\alpha \beta \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) \text{sign}(t)(|t|^{1-\alpha} - 1)) \\ & \text{si } \alpha = 1 \\ & \phi(t) = \exp(it\delta - |\gamma t|[1 + i\beta \frac{2}{\pi} \text{sign}(t) \log |t|]) \end{aligned}$$

avec $\alpha \in]0, 2]$, $\beta \in [-1, 1]$, $\gamma \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\delta \in \mathbb{R}$.

Ces quatre paramètres sont :

- α est appelé l'exposant caractéristique.
- β est le paramètre de d'asymétrie.
- γ représente le paramètre d'échelle.
- δ indique le paramètre de localisation.

Il est possible d'obtenir la fonction de densité de probabilité (fdp) en effectuant une transformée de Fourier de la fonction caractéristique :

$$fdp(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \exp(-itx) dt \quad (2)$$

Il est cependant difficile d'exprimer analytiquement la densité de probabilité mais aussi

de la représenter pour deux raisons. En effet, l'expression de la fonction caractéristique est complexe et les bornes d'intégration sont infinies. Nolan [18] suggère d'effectuer un changement de variable pour se ramener à des bornes d'intégration finies. Un programme Matlab suivant cette démarche a été développé¹.

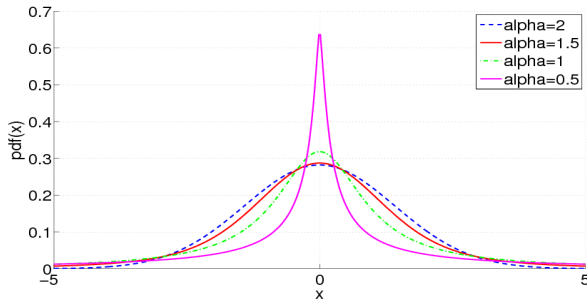


Figure 1 – Influence du paramètre α avec $\beta = 0$, $\gamma = 1$ et $\delta = 0$.

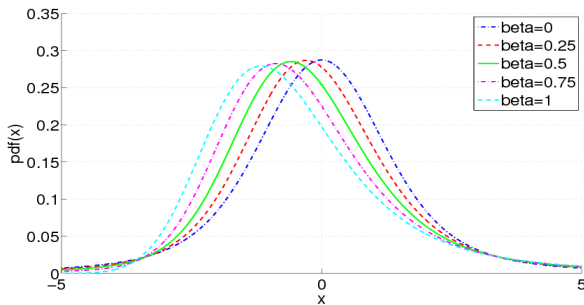


Figure 2 – Influence du paramètre β avec $\alpha = 1.5$, $\gamma = 1$ et $\delta = 0$.

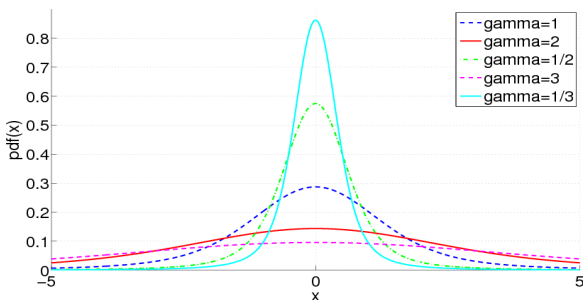


Figure 3 – Influence du paramètre γ avec $\alpha = 1.5$, $\beta = 0$ et $\delta = 0$.

Chaque paramètre influe de manière différente sur la représentation de la densité de probabilité d'une loi stable. On remarque que si α est

1. <http://math.bu.edu/people/mveillet/research.html>.

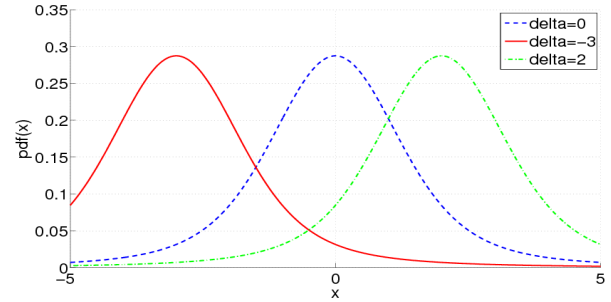


Figure 4 – Influence du paramètre δ avec $\alpha = 1.5$, $\beta = 0$ et $\gamma = 1$.

petit, la distribution présente un pic très important (cf. figure 1). Lorsque $\beta \rightarrow 1$, la distribution a tendance à être asymétrique à gauche et inversement lorsque $\beta \rightarrow -1$ (cf. figure 2). Le paramètre γ permet de dilater ou de compresser les distributions (cf. figure 3). Enfin, δ permet de translater la distribution sur l'axe des abscisses (cf. figure 4).

2.3 Exemples de fdp

Malgré la difficulté à représenter les distributions α -stables, il est possible de décrire quelques lois connues. Lorsque $\alpha = 2$ et $\beta = 0$, on retrouve l'expression d'une distribution Gaussienne :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(x-\delta)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3)$$

avec δ représentant la moyenne et σ^2 la variance. À partir de la définition de la fonction caractéristique, il faut que $\sigma^2 = 2\gamma^2$. Lorsque $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, on définit une loi de Cauchy :

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (x-\delta)^2} \quad (4)$$

Plus généralement, lorsque $\beta = 0$, on dit que la distribution α -stable est symétrique.

3 Algorithme EM

L'algorithme Espérance - Maximisation (*Expectation-Maximization* en anglais) a été développé par Dempster *et al.* [5] en

1977 permettant de trouver le maximum de vraisemblance des paramètres de modèles probabilistes.

3.1 Principe

Soit $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ une réalisation décrite par un vecteur contenant des observations. On cherche à approcher ces observations à partir d'une fonction $f(\mathbf{x}, \theta)$, avec θ correspondant aux paramètres à estimer. Pour ce faire, on cherche à déterminer le paramètre θ maximisant la log-vraisemblance :

$$L(\mathbf{x}; \theta) = \sum_{i=1}^n \log f(x_i, \theta) \quad (5)$$

On complète ces données par un vecteur $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ inconnu. On peut alors définir la log-vraisemblance complétée :

$$L((\mathbf{x}, \mathbf{z}); \theta) = \sum_{i=1}^n (\log f(z_i/x_i, \theta) + \log f(x_i; \theta)) \quad (6)$$

avec $f(z_i/x_i, \theta)$ la densité de probabilité de z_i sachant x_i et θ .

Cet algorithme est itératif et se décompose en deux étapes. Tout d'abord, il y a l'étape d'Espérance (E). Il s'agit de calculer l'espérance des données complétées conditionnellement au paramètre courant. Il faut alors calculer :

$$Q(\theta; \theta^l) = E[L((\mathbf{x}, \mathbf{z}); \theta) / \theta^l] \quad (7)$$

avec θ^l correspondant à la valeur de θ calculée à l'itération l .

Ensuite, on passe à l'étape de Maximisation (M). Elle consiste à maximiser la quantité $Q(\theta; \theta^l)$ en cherchant la valeur θ^{l+1} tel que :

$$Q(\theta; \theta^{l+1}) \geq Q(\theta; \theta^l) \quad (8)$$

Les étapes E et M sont effectuées jusqu'à ce que $|L(\theta^{l+1}) - L(\theta^l)|$ soit inférieure à une valeur arbitraire.

3.2 Cas d'un mélange de Gaussiennes

L'algorithme EM permet l'estimation de paramètres d'un mélange de distributions. Nous nous plaçons ici dans le cas de N distributions Gaussiennes. Il reste donc à estimer $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_N)$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$ et $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$. L'ensemble de ces paramètres à estimer est représenté par l'ensemble Θ . L'expression de la densité de probabilité du mélange de Gaussiennes g est définie au point \mathbf{x} par :

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N \pi_k f(\mathbf{x}, \mu_k, \sigma_k) \quad (9)$$

La log-vraisemblance des données complétées pour un mélange est définie par :

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \sum_{t=1}^n \sum_{k=1}^N z_{tk} \times \log(\pi_k f(x_t, \mu_k, \sigma_k)) \quad (10)$$

On obtient alors :

$$Q(\Theta, \Theta^l) = \sum_{t=1}^n \sum_{k=1}^N E[z_{tk} / \mathbf{x}, \Theta^l] \times \log(\pi_k f(x_t, \mu_k, \sigma_k)) \quad (11)$$

L'étape d'Espérance (E) constitue à calculer $h_{tk} = E[z_{tk} / \mathbf{x}, \Theta^l]$, avec :

$$h_{tk} = \frac{\pi_k^l f(x_t, \mu_k^l, \sigma_k^l)}{\sum_{p=1}^N \pi_p^l f(x_t, \mu_p^l, \sigma_p^l)} \quad (12)$$

Ensuite, il faut maximiser $Q(\Theta, \Theta^l)$ par rapport à chaque paramètre. Les différents poids de chaque Gaussienne sont données par :

$$\pi_k = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n h_{tk} \quad (13)$$

L'expression de la moyenne estimée est :

$$\mu_k = \frac{\sum_{t=1}^n h_{tk} x_t}{\sum_{t=1}^n h_{tk}} \quad (14)$$

Enfin, la variance estimée a pour expression :

$$\sigma_k^2 = \frac{\sum_{t=1}^n h_{tk}(x_t - \mu_k)(x_t - \mu_k)'}{\sum_{t=1}^n h_{tk}} \quad (15)$$

À partir de ce mélange, il est possible de calculer la fonction de masse au point \mathbf{x} en utilisant [3]. Le modèle mélange de Gaussiennes a été testé sur des données réelles pour la classification de sédiments marins [8].

4 Algorithme EM pour un mélange de distributions α -stables symétriques

Nous nous plaçons dans le cas de N distributions α -stable symétriques, c'est-à-dire que $\beta = 0$. Il reste donc à estimer $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_N)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N)$ et $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_N)$. L'ensemble de ces paramètres à estimer est représenté par l'ensemble Θ . L'expression de la densité de probabilité du mélange d' α -stables g est définie au point x par :

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N \pi_k f(\mathbf{x}, \alpha_k, \gamma_k, \delta_k) \quad (16)$$

On définit la log-vraisemblance des données complétées pour un mélange par :

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \sum_{t=1}^n \sum_{k=1}^N z_{tk} \times \log(\pi_k f(x_t, \alpha_k, \gamma_k, \delta_k)) \quad (17)$$

On calcule alors l'espérance de l'équation (17) :

$$Q(\Theta, \Theta^l) = \sum_{t=1}^n \sum_{k=1}^N E[z_{tk}/\mathbf{x}, \Theta^l] \times \log(\pi_k f(x_t, \alpha_k, \gamma_k, \delta_k)) \quad (18)$$

Comme dans le cas Gaussien, il faut calculer $h_{tk} = E[z_{tk}/\mathbf{x}, \Theta^l]$, avec :

$$h_{tk} = \frac{\pi_k^l f(x_t, \alpha_k^l, \gamma_k^l, \delta_k^l)}{\sum_{p=1}^N \pi_p^l f(x_t, \alpha_p^l, \gamma_p^l, \delta_p^l)} \quad (19)$$

On maximise la quantité $Q(\Theta, \Theta^l)$ par rapport à chaque paramètre. Les différents poids de chaque α -stable sont donnés par :

$$\pi_k = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n h_{tk} \quad (20)$$

Pour les autres paramètres, il faut procéder de manière numérique. En effet, la densité de probabilité d'une α -stable symétrique est complexe à cause de l'intégrale. Par conséquent, pour maximiser $Q(\Theta, \Theta^l)$, il suffit de calculer la dérivée $Q(\Theta, \Theta^l)$ par rapport à chaque paramètre et de regarder lorsqu'elle s'annule. Des travaux ont été réalisés pour calculer numériquement ces différentes dérivées [13]. Les différentes représentations des dérivées sont observables en figure 5, figure 6 et figure 7.

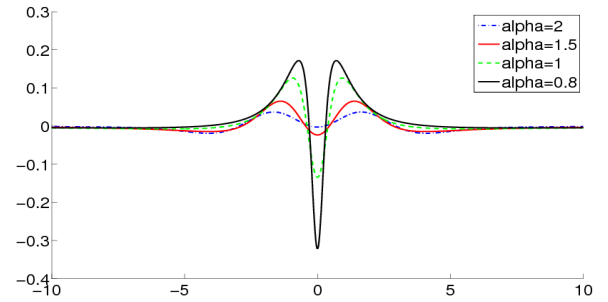


Figure 5 – Dérivée de la *fdp* par rapport à α avec $\gamma = 1$ et $\delta = 0$.

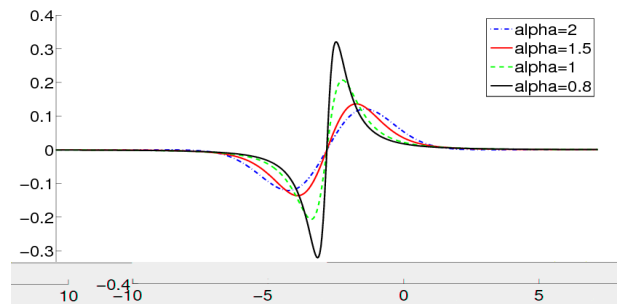


Figure 6 – Dérivée de la *fdp* par rapport à δ avec $\gamma = 1$ et $\delta = 0$.

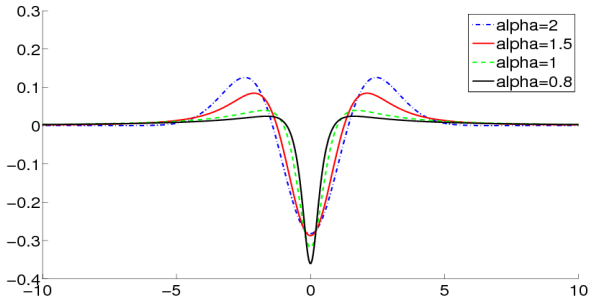


Figure 7 – Dérivée de la f_{dp} par rapport à γ avec $\gamma = 1$ et $\delta = 0$.

5 Résultats

5.1 Estimation d'une distribution α -stable

Il existe dans la littérature plusieurs méthodes permettant d'estimer une distribution α -stable [11, 14, 7]. Une estimation par maximum de vraisemblance a été testée dans [2]. Dans cette partie, nous allons estimer les paramètres α , γ et δ au moyen d'un maximum de vraisemblance, utilisant les résultats de [13], et comparer ces valeurs avec la méthode définie dans [14].

Tout d'abord, nous générons une variable aléatoire stable de 200 observations à partir de [4]. Ensuite, il est important d'initialiser les premières valeurs de α , γ et δ . Nous utilisons alors un algorithme génétique [10] permettant d'obtenir une solution approchée des paramètres à estimer. Il faut noter que plus le nombre de paramètres à estimer est important et plus le temps de calcul de l'algorithme génétique est élevé. Typiquement, le temps de calcul croît en $N \ln N$ avec N représentant le nombre paramètres à estimer. Nous reproduisons ce schéma sur 10 itérations. Les valeurs moyennées sont représentées dans le tableau 1 et les différentes courbes sont observables en figure 8. L'erreur moyenne normalisée par rapport à chaque paramètre complète ces données. Nous remarquons que les deux méthodes permettent d'avoir des résultats satisfaisants. Cependant, la méthode utilisant le maximum de vraisemblance est beaucoup plus coûteuse en temps de calcul

	α	γ	δ
Vraies valeurs	1.64	2.25	7.57
Estimation par MV	1.6565	2.2121	7.5750
Estimation par quantiles	1.6862	2.2214	7.6297
Erreur moyenne MV	0.0494	0.0706	0.0303
Erreur moyenne quantile	0.0791	0.0700	0.0336

Tableau 1 – Estimation des différents paramètres et erreurs commises calculées sur 10 itérations.

par rapport à la méthode des quantiles. Nous généralisons le maximum de vraisemblance pour l'estimation d'un mélange d' α -stables.

Figure 8 – Comparaison entre les différentes méthodes d'estimation.

5.2 Cas d'un mélange d' α -stables

Tout d'abord, nous générons trois distributions α -stables en utilisant [4]. L'étape d'initialisation ne se fait plus par un algorithme génétique mais par un algorithme K -means [16]. Il permet de choisir K centroïdes dans les régions de l'espace les plus peuplées. Ensuite, un calcul de distance permet de placer chaque observation à sa classe la plus proche. Dans notre cadre d'étude, nous utilisons une distance de Manhattan. Une fois que les différentes observations sont placées dans une classe, il est possible de calculer chaque proportion en calculant le rapport entre le nombre d'observations contenu dans une classe et le nombre d'observations totales. Ensuite, pour chaque classe, nous appliquons la méthode par McCulloch [14] pour initialiser les valeurs α , γ et δ . Ensuite, nous injectons ces paramètres dans l'algorithme EM

défini en section 4. Pour pouvoir comparer l'ap-

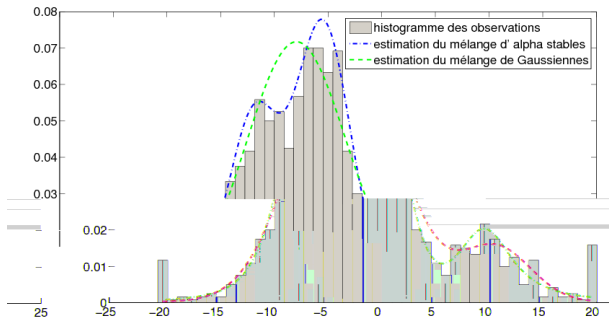


Figure 9 – Comparaison entre un mélange d' α -stables et de Gaussiennes

proche avec le mélange d' α -stables, on effectue une estimation avec un mélange de Gaussiennes. Pour chaque mélange, on calcule 12 paramètres ce qui équivaut à 3 α -stables et 4 Gaussiennes. Les vraies valeurs ainsi que leurs estimées sont représentées dans le tableau 2.

	valeur réelle	valeur estimée
α_1	1.6	1.4832
α_2	1.4	1.9986
α_3	1.2	1.1101
γ_1	1.26	2.0963
γ_2	1.5	1.7509
γ_3	3.2	2.7670
δ_1	-5.5	-6.8291
δ_2	0	-0.3930
δ_3	10.1	9.9524
w_1	1/2	0.3782
w_2	1/3	0.4408
w_3	1/6	0.1809

Tableau 2 – Estimation des différents paramètres.

On remarque que les valeurs estimées ne sont pas tout à fait en accord avec les vrais paramètres. Cependant, lorsque l'on observe la figure 9, on remarque que le mélange d' α -stables suit mieux l'histogramme des observations. Nous effectuons un calcul d'erreur quadratique pour comparer les performances des deux estimations. L'erreur quadratique faite par

hypothèse d'un mélange de Gaussiennes est de 0.0022 alors que le mélange d' α -stables a une erreur quadratique de $9.51e^{-4}$. L'hypothèse mélange de Gaussiennes est moins performante que le mélange d' α -stables. Par exemple, on remarque que le mélange de Gaussiennes discrimine mal les 2 premiers pics. On observe que 2 Gaussiennes sur 4 car la variance est très grande pour 2 d'entre elles ce qui atténue leurs effets. Il est possible de résoudre ce problème en augmentant le nombre de Gaussiennes.

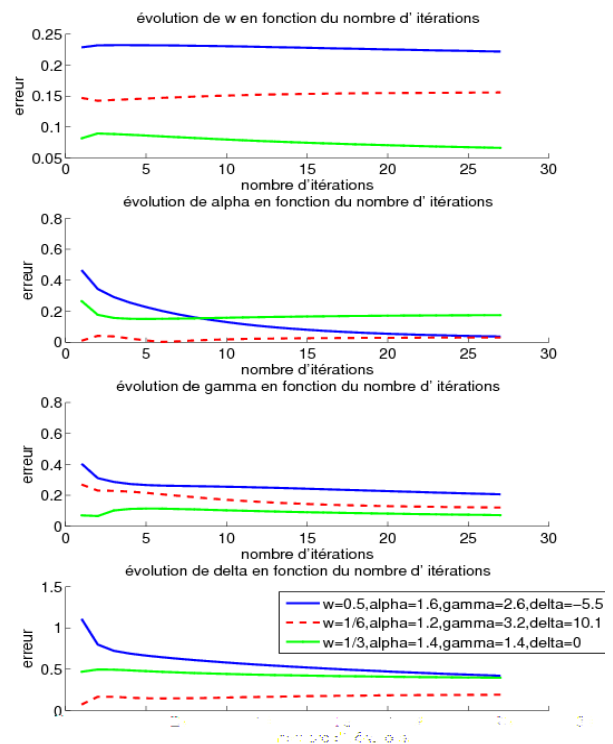


Figure 10 – Tracé des différentes erreurs en fonction du nombre d'itérations.

Lors de l'étape de maximisation, il est possible de calculer les paramètres dans des ordres différents. Nous avons choisi de calculer α , puis γ et enfin δ . On peut voir sur la figure 10 le tracé des différentes erreurs en valeur absolue en fonction du nombre d'itérations. On remarque que les erreurs n'évoluent plus beaucoup après quelques itérations. Ceci permet de fixer un nombre maximal d'itérations inférieur à 10.

6 Conclusion

Dans cet article, nous développons un algorithme EM pour l'estimation d'un mélange de distributions α -stables. L'estimation d'une distribution α -stable à partir d'un maximum de vraisemblance est une étape difficile. Les étapes d'initialisation par un algorithme génétique et de minimisation par rapport à chaque paramètre sont longues. En effet, les calculs se font de manière analytique contrairement aux mélanges de Gaussiennes où la résolution est numérique. Cependant, le maximum de vraisemblance donne des résultats similaires aux autres estimateurs. Ensuite, la généralisation à un mélange α -stables pose des problèmes notamment au niveau de l'étape d'initialisation. L'algorithme génétique ne donne pas des résultats pertinents permettant d'approcher les paramètres. Cependant, l'initialisation par l'algorithme K -means permet de gagner en temps de calcul.

Une fois chaque paramètre du mélange estimé, nous pouvons alors modéliser les données à partir d'un mélange de distributions α -stables puis calculer la fonction de masse associé à ce mélange. L'étape suivante sera alors de combiner ces fonctions de masse pour pouvoir classifier nos données comme dans le cas Gaussien [3]. Pour prendre en compte la densité de masse consonante, il sera utile d'utiliser [6].

Références

- [1] A. Achim, and P. Tsakalides, and A. Bezerianos. SAR image denoising via Bayesian wavelet shrinkage based on heavy-tailed modelling, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 41(8) : 1773–1784, 2003.
- [2] B.W. Brorsen, and S.R. Yang. Maximum likelihood estimates of symmetric stable distributions parameters, *Comm. Statist. Simulation Comput.*, 19 : 1459–1464, 1990.
- [3] F. Caron, and B. Ristic, and E. Duflos, and P. Vanheeghe. Least Committed basic belief density induced by a multivariate Gaussian pdf, *International Conference on Information Fusion*. Florence, Italie, 2006.
- [4] J.M. Chambers, and C.L. Mallows, and B.W. Stuck. A method for simulating stable random variables, *Journal of the American Statistical Association*, 71(354) : 340–344, 1976.
- [5] A. Dempster, N. Laird, D. Rubin. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *J. Royal Statistical Society B*, 39 : 1-38, 1977.
- [6] P.-E. Doré, and A. Martin, Constructing consonant belief function induced by a multimodal probability, *Workshop belief functions in Brest*, 2010.
- [7] E.F. Fama, and R. Roll. Parameter estimates for symmetric stable distributions, *Journal of the American Statistical Association*, 66(334) : 331–338, 1971.
- [8] A. Fiche, and A. Martin. Bayesian approach and continuous belief functions for classification, *Rencontre francophone sur la Logique Floue et ses Applications (LFA2009)*, 2009.
- [9] A. Fiche, A. Martin, J.C. Cexus, A. Khenchaf. Continuous belief functions and α -stable distributions, *International Conference on Information Fusion*. Edinburgh, United Kingdom, 2010.
- [10] D.E. Goldberg. Genetic algorithms in search and optimization, *Addison-Wesley*, 1989.
- [11] I.A. Koutrouvelis. Regression-type estimation of the parameters of stable laws, *Journal of the American Statistical Association* 75(372) : 918–928, 1980.
- [12] P. Lévy. Théorie des erreurs : La loi de Gauss et les lois exceptionnelles, *Bull. Soc. Math. France*, 52 : 49–85, 1924.
- [13] M. Matsui, and A. Takemura. Some improvements in evaluation of symmetric stable density and its derivatives. *Communications in statistics-theory and methods*, 35(1) : 149–172, 2006.
- [14] J.H. McCulloch. Simple consistent estimators of stable distribution parameters, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 15(4) : 1109–1136, 1986.
- [15] J.H. McCulloch. Financial applications of stable distributions, *Handbook of statistics*, 14 : 393–425, 1996.
- [16] J. McQueen. Some methods for classification and analysis of multivariate observations, *In Proceedings of the fifth berkeley symposium on mathematical statistics and probability* 1 : 281–297, 1967.
- [17] C.L. Nikias and M. Shao. *Signal processing with alpha-stable distributions and applications*, 1995.
- [18] J.P. Nolan. Numerical calculation of stable densities and distribution functions, *Communications in Statistics-Stochastic Models*, 13(4) : 759–774, 1997.
- [19] J.P. Nolan. Maximum likelihood estimation and diagnostics for stable distributions, *Lévy Processes : Theory and Applications* : 379–400, 2001.
- [20] D. Salas-Gonzalez, and E.E. Kuruoglu, and D.P. Ruiz. Finite mixture of α -stable distributions, *Digital Signal Processing*, 19(2) : 250–264, 2009.
- [21] Ph. Smets. Belief functions on real numbers, *International journal of approximate reasoning*, 40(3) : 181-223, 2005.
- [22] M.S. Taqqu, and G. Samorodnisky. Stable non-gaussian random processes, *Chapman and Hall*, 1994.
- [23] V.M. Zolotarev. One-dimensional stable distributions, *Amer. Math. Soc. Transl. of Math. Monographs*, Vol. 65. Amer Mathematical Society, 1986.